



**UN NUOVO ALGORITMO DI INVERSIONE DELLA  
DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARDIZZATA  
E SUE APPLICAZIONI FINANZIARIE**

**Maria Giuseppina Bruno e Antonio Grande**

**Working paper n.131**

**June 2014**

# UN NUOVO ALGORITMO DI INVERSIONE DELLA DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARDIZZATA E SUE APPLICAZIONI FINANZIARIE

Maria Giuseppina Bruno<sup>1</sup>  
Antonio Grande<sup>2</sup>

## ABSTRACT

*Nelle applicazioni finanziarie del metodo Montecarlo e Quasi-Montecarlo, uno dei problemi più comuni è il campionamento da una data distribuzione cumulata. In questo documento, tra i diversi approcci, ci riferiamo al metodo della "Trasformata inversa" e proponiamo un nuovo algoritmo per eseguire l'inversione. Mostriamo in particolare un'applicazione del suddetto algoritmo per calcolare l'inversa della funzione di ripartizione normale standardizzata e valutare opzioni finanziarie su un sottostante con rendimenti normali. L'algoritmo proposto è implementabile su personal computer tradizionali ed è paragonabile per velocità ed errore di approssimazione agli altri presenti in letteratura. Un suo ulteriore vantaggio è quello di essere facilmente generalizzabile ad altre distribuzioni ed alle relative inverse. In questo modo è possibile impiegarlo per la valutazione delle opzioni finanziarie in ipotesi diverse riguardo la dinamica del sottostante.*

**Classification JEL:** C020, C630, C650.

**Keywords:** *Inverse of a Distribution, Montecarlo and Quasi-Montecarlo Methods, Financial Options Evaluation, Algorithm.*

## 1. INTRODUZIONE

In questo lavoro, proponiamo un nuovo algoritmo per calcolare l'inversa di una funzione di ripartizione.

Il problema ricorre in molte applicazioni finanziarie del metodo Montecarlo e Quasi-Montecarlo, ma al fine di focalizzare l'attenzione sui suoi aspetti infor-

---

<sup>1</sup>Affiliation: Department of Methods and Models for Economics, Territory and Finance - Sapienza University of Rome - Via del Castro Laurenziano 9, 00161 Rome (email: giuseppina.bruno@uniroma1.it)

<sup>2</sup>Affiliation: Department of Methods and Models for Economics, Territory and Finance - Sapienza University of Rome - Via del Castro Laurenziano 9, 00161 Rome (email: antonio.grande@uniroma1.it)

matici, ci riferiamo al semplice caso di valutazione di una tradizionale opzione call europea su un unico sottostante con distribuzione normale dei rendimenti.

Secondo l'approccio di valutazione "rischio neutrale", il valore corrente all'epoca  $t$  di un'opzione call europea su unico sottostante con scadenza in  $T$  è dato da:

$$C_t = e^{-\delta(T-t)} E_Q \left[ \max \left( 0; S_T - X \right) \right] \quad (1)$$

dove:

- $\delta$  è l'intensità istantanea di interesse priva di rischio;
- $T - t$  è il tempo residuo a scadenza dell'opzione;
- $E_Q$  è l'operatore di valore medio relativo alla misura equivalente di martingala  $Q$ ;
- $S_T$  è il prezzo del titolo sottostante l'opzione a scadenza;
- $X$  è il prezzo di esercizio dell'opzione.

Per una più facile futura estensione della valutazione ad opzioni "path-dependent" o multidimensionali, suddividiamo il tempo residuo a scadenza dell'opzione in un numero finito  $d$  di intervalli, non necessariamente di uguale ampiezza, mediante epoche prefissate chiamate "reset points".

Siano  $T_1, T_2, \dots, T_d$  (con  $t = T_0 < T_1 < \dots < T_d = T$ ) i resets points e si indichi con  $S_{T_k}$  (con  $k = 1, 2, \dots, d$ ) il prezzo del titolo sottostante l'opzione in corrispondenza di essi.

Nell'ipotesi che il prezzo del titolo sottostante l'opzione segua un moto geometrico Browniano con volatilità annua  $\sigma$ , si ha per  $k = 1, 2, \dots, d$ :

$$S_{T_k} = S_{T_{k-1}} e^{\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T_k - T_{k-1}) + \sigma \sqrt{T_k - T_{k-1}} N_k(0,1)} \quad (2)$$

dove  $N_k(0,1)$  sono variabili aleatorie normali standardizzate indipendenti.

Di conseguenza la (1) diventa:

$$C_t = e^{-\delta(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \max \left[ 0; \exp \left( m + \sum_{k=1}^d s_k y_k \right) - X \right] \quad (3)$$

$$\varphi(y_1) \varphi(y_2) \dots \varphi(y_d) dy_1 dy_2 \dots dy_d$$

dove, per  $k = 1, 2, \dots, d$ ,  $y_k$  sono le determinazioni numeriche di variabili aleatorie normali standardizzate indipendenti e  $\varphi(y_k)$  le corrispondenti funzioni di densità. Inoltre:

$$m = \log S_t + \left( \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) \quad (4)$$

$$s_k = \sigma \sqrt{T_k - T_{k-1}} \quad (5)$$

Come noto nella letteratura finanziaria, la (3) dispone di una soluzione analitica fornita dalla celebre formula di Black, Scholes seguente:

$$C_t = S_t \Phi(d_1) - X e^{-\delta(T-t)} \Phi(d_2) \quad (6)$$

dove  $\Phi(\cdot)$  è la funzione di ripartizione di una normale standardizzata e inoltre:

$$d_1 = \frac{-\log X + m}{s} + s \quad (7)$$

$$d_2 = d_1 - s \quad (8)$$

avendo posto:

$$s = \sigma \sqrt{T - t} \quad (9)$$

Applicando invece i metodi Montecarlo e Quasi-Montecarlo, la (3) può essere approssimata come segue:

$$C_t \cong e^{-\delta(T-t)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max \left[ 0; \exp \left( m + \sum_{k=1}^d s_k y_k^{(i)} \right) - X \right] \quad (10)$$

dove  $-\infty < y_k^{(i)} < +\infty$  è la  $k$ -esima componente (con  $k = 1, \dots, d$ ) dell' $i$ -esimo vettore a  $d$  dimensioni  $\mathbf{y}^{(i)}$  (con  $i = 1, \dots, N$ ) estratto da distribuzioni normali standardizzate indipendenti e  $N$  il numero di vettori generati.

In entrambi i casi, la (3) è approssimata attraverso la media aritmetica dei valori dell'opzione lungo un numero finito  $N$  di distinte traiettorie del prezzo del titolo sottostante rappresentate dai suddetti vettori a  $d$  dimensioni.

L'unica differenza tra il metodo Montecarlo e il metodo Quasi-Montecarlo consiste nella modalità di generazione di dette traiettorie: nel primo caso, si tratta di vettori di  $d$  numeri pseudo casuali mentre nel secondo si tratta di sequenze deterministiche di punti "a bassa discrepanza" dello spazio a  $d$  dimensioni.

Dal punto di vista computazionale, il calcolo della (10) comporta due diversi ordini di difficoltà:

- il primo è dovuto all'elevata dimensionalità. Una buona approssimazione richiede infatti dal punto di vista teorico la generazione di un numero di traiettorie  $N$  molto grande (dell'ordine di milioni) e, inoltre, ogni traiettoria richiede la generazione di un vettore a  $d$  dimensioni;

- il secondo è dovuto al fatto che i principali generatori di numeri pseudo casuali, per l'applicazione del metodo Montecarlo, e di sequenze a bassa-discrepanza, per l'applicazione del metodo Quasi-Montecarlo, generano numeri estratti da distribuzioni uniformi nell'intervallo  $[0, 1]$ . Si rende pertanto necessario convertire detti numeri in numeri estratti da una distribuzione diversa, nel caso in esame una distribuzione normale standardizzata.

Diversi sono i metodi esistenti in letteratura per affrontare quest'ultimo aspetto, da quelli più generali a quelli elaborati per specifiche applicazioni.

Nel paragrafo seguente, illustriamo i metodi basati sulla Trasformata inversa. Nel paragrafo 3, illustriamo il metodo di inversione alternativo da noi proposto e nel paragrafo 4 mostriamo alcuni risultati comparativi.

## 2. METODI BASATI SULLA TRASFORMATA INVERSA

Nel presente paragrafo, esaminiamo i principali metodi proposti in letteratura per la generazione di numeri casuali da una distribuzione diversa dall'uniforme mediante inversione. Detti metodi, oltre a poter essere applicati per diverse tipologie di distribuzioni, tra cui quelle condizionate, presentano due ulteriori vantaggi rispetto a metodi basati su altre metodologie:

- il primo è costituito dal fatto che essi producono come risultato funzioni monotone e continue delle distribuzioni uniformi rendendo fattibile l'applicazione di tecniche di riduzione della varianza nel caso del metodo Montecarlo;
- il secondo è costituito dal fatto che essi consentono di preservare la bassa discrepanza delle sequenze Quasi-Montecarlo senza aumentare ulteriormente la dimensione del problema (al contrario di quanto accade invece per la nota trasformazione di Box-Muller e per il metodo di Marsaglia-Bray basato sulla tecnica di Acceptance-Rejection).

Concettualmente, la tecnica della Trasformata inversa è semplice: considerato che il codominio di una qualunque cumulata  $x = F(y)$  è rappresentato dall'intervallo  $[0, 1]$ , dato un punto estratto da una distribuzione uniforme in detto intervallo, per ottenere il corrispondente valore estratto dalla distribuzione data basta calcolare il valore della relativa funzione di ripartizione inversa in quel punto. In formule:  $y_0 = F^{-1}(x_0)$  come mostrato in Figura 1 nel caso di una normale standardizzata.

In generale, il problema è ben definito se la funzione di ripartizione della distribuzione data è monotona crescente. Diversamente, occorre definire una regola per scegliere uno tra i diversi valori della  $y$  cui è associato il medesimo valore della  $x$ .

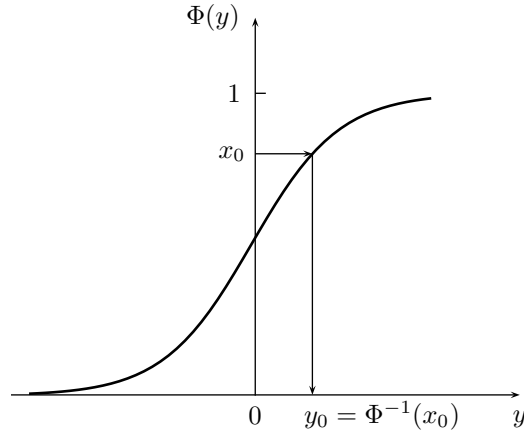


Figure 1: Trasformata inversa

Utilizzando il metodo della Trasformata inversa, la (10) si modifica allora semplicemente come segue:

$$C_t \cong e^{-\delta(T-t)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max \left[ 0; \exp \left( m + \sum_{k=1}^d s_k \Phi^{-1}(x_k^{(i)}) \right) - X \right] \quad (11)$$

dove  $\Phi^{-1}(\cdot)$  è l'inversa della funzione di ripartizione normale standardizzata e  $0 < x_k^{(i)} < 1$  sono numeri pseudo-casuali o quasi-casuali estratti da distribuzioni uniformi.

Per ogni  $k$  (con  $k = 1, 2, \dots, d$ ) e per ogni  $i$  (con  $i = 1, 2, \dots, N$ ), il problema consiste quindi nel calcolare quel valore di  $y$  tale che  $\Phi(y) = x$  con  $x$  estratto da una distribuzione uniforme e:

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (12)$$

L'inversa della (12) però, come quella di molte altre distribuzioni, non può essere calcolata in via esatta. In letteratura esistono pertanto diversi algoritmi di approssimazione.

Alcuni autori approssimano direttamente l'inversa  $\Phi^{-1}$ .

In particolare, Beasley, Springer (1977) forniscono un'approssimazione razionale; successivamente Moro (1995) migliora l'accuratezza utilizzando un'approssimazione di Chebyshev lungo le code della distribuzione.

Secondo detti autori, si ha:

$$\Phi^{-1}(x) \approx \begin{cases} \frac{\sum_{n=0}^3 a_n (x - \frac{1}{2})^{2n+1}}{1 + \sum_{n=0}^3 b_n (x - \frac{1}{2})^{2n}} & \text{per } 0,5 \leq x \leq 0,92 \\ g(x) = \sum_{n=0}^8 c_n [\log(-\log(1-x))]^n & \text{per } 0,92 \leq x < 1 \end{cases} \quad (13)$$

con  $a_n, b_n, c_n$  opportunamente calcolati. Per la simmetria della distribuzione normale standardizzata, si ha inoltre:

$$\Phi^{-1}(x) \approx -g(1-x) \quad \text{per } 0 < x \leq 0,08 \quad (14)$$

Altri autori, invece, approssimano prima di tutto la funzione di ripartizione  $\Phi$  o sue trasformate, poi ricavano l'inversa.

In particolare, alcuni propongono algoritmi basati sull'approssimazione della cosiddetta funzione errore  $Erf$  e della sua inversa  $Erf^{-1}$  da cui è possibile poi ricavare algebricamente l'approssimazione di  $\Phi$  e  $\Phi^{-1}$ .

Si ha infatti:

$$Erf(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt \quad (15)$$

e, confrontando con la (12), è facile osservare che per  $x \leq 0$ :

$$Erf(y) = 2\Phi(y\sqrt{2}) - 1 \quad \text{e} \quad Erf^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) \quad (16)$$

da cui si ricava algebricamente:

$$\Phi(y) = \frac{1}{2} \left[ Erf\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + 1 \right] \quad \text{e} \quad \Phi^{-1}(x) = \sqrt{2} Erf^{-1}(2x - 1) \quad (17)$$

Hastings (1955), attraverso un'approssimazione della  $Erf$ , perviene ad una approssimazione polinomiale delle  $\Phi$  di facile implementazione su tradizionali CPU. Più recentemente Giles (2011) propone una più efficiente approssimazione mediante l'impiego di hardware GPU.

Marsaglia, Zaman, Marsaglia (1994) propongono invece un algoritmo basato sull'approssimazione di  $1 - \Phi$  da cui poi ricavano  $\Phi^{-1}$  applicando il metodo di Newton. Marsaglia (2004) illustra anche i risultati di un confronto di detta approssimazione con quella della funzione errore.

Aludaat, Alodat (2008) propongono infine un'approssimazione della funzione di ripartizione c.d. "one term" di facile implementazione ed inversione. Essi di fatto migliorano l'approssimazione di Polya data, per  $y > 0$ , dalla seguente:

$$\Phi(y) \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{2}{\pi} y^2}} \right) \quad (18)$$

sostituendo un limite superiore più stringente al secondo membro. In particolare, essi ottengono la seguente approssimazione per  $\Phi$ :

$$\Phi(y) \approx \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - e^{-\sqrt{\frac{\pi}{8}} y^2}} \right) \quad (19)$$

da cui algebricamente segue l'approssimazione per  $\Phi^{-1}$ :

$$\Phi^{-1}(x) \approx \sqrt{-\sqrt{\frac{8}{\pi}} \log(1 - (2x - 1)^2)} \quad (20)$$

Questa, pur essendo migliore di quella di Polya, non risulta però migliore di quella proposta dagli altri autori sopra citati. Ciò non è irrilevante nella valutazione delle opzioni e nelle applicazioni multidimensionali in genere in cui la bontà dell'approssimazione è importante tanto quanto la velocità e semplicità di implementazione del calcolo.

### 3. L'ALGORITMO PROPOSTO

L'algoritmo da noi proposto per effettuare l'inversione è basato su una logica completamente diversa da quella seguita nella letteratura citata: l'approssimazione non consiste infatti nella ricerca di una funzione approssimante la cumulata ma semplicemente in una discretizzazione della funzione di ripartizione con il vantaggio di poter fissare l'errore massimo di approssimazione desiderato per il calcolo dell'inversa.

Procediamo in sostanza come segue.

Per cominciare, limitiamo il campo di integrazione tra -5 e +5. Ciò è sufficiente ad ottenere un'approssimazione della funzione di ripartizione migliore di  $10^{-14}$  nel senso che il suo valore differisce da zero, in corrispondenza dell'estremo inferiore -5, e da uno, in corrispondenza dell'estremo superiore +5, per meno di detta quantità.

Successivamente, dividiamo il campo di integrazione in intervalli parziali di ampiezza pari all'approssimazione dell'inversa desiderata (per esempio 1.000.000 di intervalli parziali per ottenere un'approssimazione dell'inversa pari a  $10^{-5}$ ). Per ciascun estremo superiore calcoliamo la funzione di ripartizione applicando



uno dei tradizionali metodi di integrazione numerica e ne tabuliamo i corrispondenti valori.

Il calcolo dell'inversa è quindi poi effettuato con un semplice procedimento di "root finding" all'interno della tabella così ottenuta.

Al contrario dei lavori della letteratura citati, l'algoritmo proposto ha il vantaggio di non sfruttare necessariamente la proprietà di simmetria della distribuzione normale standardizzata, né la particolare "somiglianza" di quest'ultima con la *Erf*. Ciò lo rende quindi teoricamente generalizzabile all'approssimazione di altre distribuzioni e relative inverse e di conseguenza applicabile alla valutazione delle opzioni anche in ipotesi diverse da quella di moto geometrico browniano per la dinamica del sottostante.

Gli autori ritengono applicabile l'algoritmo anche nel caso di funzioni non strettamente crescenti introducendo un'opportuna modifica in fase di costruzione della tabella della funzione di ripartizione.

Inoltre, l'algoritmo proposto può essere implementato su normali personal computer garantendo comunque, come mostrato nel paragrafo che segue, prestazioni paragonabili in termini di tempo di esecuzione ed errore di approssimazione a quelle degli altri algoritmi proposti in letteratura.

#### 4. APPLICAZIONI

Nel presente paragrafo, mostriamo alcune applicazioni dell'algoritmo proposto.

Ci riferiamo alla valutazione di una opzione call europea su un unico sottostante avente le seguenti caratteristiche contrattuali:

- durata  $(T - t) = 0.5$  anni;
- prezzo di esercizio  $X = 110$ ;
- prezzo corrente del titolo sottostante all'epoca di valutazione  $S_t = 100$ .

Supponiamo inoltre che la dinamica del titolo sottostante soddisfi la (2) con volatilità annua  $\sigma = 0.20$  e intensità istantanea di interesse priva di rischio su base annua  $\delta = 0.10$ .

Nelle suddette ipotesi, applicando la formula di Black, Scholes (6), il prezzo della call risulta pari a 3.743206587 che usiamo come riferimento per la misurazione dell'errore percentuale commesso applicando i metodi approssimati.

In Tabella 1, riportiamo i risultati ottenuti con il metodo Montecarlo applicando la (11) con  $d = 1$  per valori crescenti del numero delle replicazioni  $N$  e adottando i metodi illustrati nei paragrafi 2 e 3 per la generazione dei numeri pseudo-casuali normali. In particolare:

- in colonna 2, riportiamo i risultati ottenuti mediante l'algoritmo di Moro;

- in colonna 3, riportiamo i risultati ottenuti mediante la funzione  $Erf$ ;
- nella colonna 4, riportiamo i risultati ottenuti mediante l'algoritmo da noi proposto (indicato con la sigla BG) fissando una precisione alla quarta cifra decimale nel calcolo dell'inversa della funzione di ripartizione normale standardizzata.

In tutti e tre i casi, tra parentesi è riportato l'errore percentuale rispetto al valore esatto di Black, Scholes.

N	Moro	Erf	BG
100	3.133739445 (0.162819%)	3.133739445 (0.162819%)	3.133742441 (0.162819%)
1000	3.869043859 (0.033617%)	3.869043859 (0.033617%)	3.869049783 (0.033619%)
10000	3.664459946 (0.021037%)	3.664459946 (0.021037%)	3.664466563 (0.021035%)
100000	3.726419905 (0.004485%)	3.726419905 (0.004485%)	3.726430825 (0.004482%)
1000000	3.740819808 (0.000638%)	3.740819808 (0.000638%)	3.740837589 (0.000633%)
10000000	3.741757137 (0.000387%)	3.741757138 (0.000387%)	3.741772561 (0.000383%)

Table 1: Risultati con  $d=1$

In Tabella 2, riportiamo i risultati ottenuti applicando la (11) con  $d = 26$ .

N	Moro	Erf	BG
100	4.328169205 (0.156273%)	4.328169207 (0.156273%)	4.328232758 (0.156290%)
1000	3.304348416 (0.117241%)	3.304348416 (0.117241%)	3.30439274 (0.117229%)
10000	3.658223139 (0.022703%)	3.658223139 (0.022703%)	3.658284579 (0.022687%)
100000	3.739495828 (0.000991%)	3.739495828 (0.000991%)	3.739568341 (0.000972%)
1000000	3.736732681 (0.001729%)	3.736732681 (0.001729%)	3.736806038 (0.001710%)
10000000	3.742290314 (0.000245%)	3.742290314 (0.000245%)	3.742363898 (0.000225%)

Table 2: Risultati con  $d=26$

## 5. CONCLUSIONI

Nel presente lavoro, proponiamo un nuovo algoritmo per il calcolo dell'inversa della funzione di ripartizione di una normale standardizzata e ne mostriamo un'applicazione nella valutazione di un'opzione finanziaria tradizionale.

L'algoritmo segue una logica diversa da quella degli altri esistenti in letteratura garantendo comunque risultati confrontabili in termini di tempo di esecuzione ed errore di approssimazione. A differenza di essi, è generalizzabile al calcolo dell'inversa di funzioni di ripartizione di altre distribuzioni ed è applicabile alla valutazione di opzioni finanziarie, anche multidimensionali, in ipotesi diverse da quelle tradizionali.

## References

- ALUDAAT, K.M. E ALODAT, M.T. (2008) A Note on Approximating the Normal Distribution Function. *Applied Mathematical Sciences*, 2, 425–429.
- BEASLEY, J.D. E SPRINGER, S.G. (1977) The percentage points of the Normal Distribution. *Applied Statistics*, 26, 118–121.
- GILES, M. (2011) *Approximating the erfinv function*. Morgan Kaufman, 2, Capitolo 11.
- HASTINGS, C. JR (1955) *Approximations for Digital Computers*. Princeton University Press.
- MARSAGLIA, G. (2004) Evaluating the Normal Distribution. *Journal of Statistical Software*, 11, 5–11.
- MARSAGLIA, G., ZAMAN, A. E MARSAGLIA, J.C.W. (1994) Rapid Evaluation of the Inverse of the Normal Distribution Function. *Statistics and Probability Letters*, 19, 259–266.
- MORO, B. (1995) The Full Monte. *Risk*, 8, 57–58.

Ringraziamenti: Gli autori ringraziano il referee anonimo per gli utili suggerimenti.